Ce problème fait étudier certaines propriétés de l'équation différentielle

$$-u''(x) + x^2 u(x) = \lambda u(x)$$

en particulier les polynômes d'Hermite (partie I), et une inégalité qui est la traduction mathématique du principe d'incertitude de Heisenberg (question 12)). Les questions 9) et 10) de la partie II peuvent être traitées sans faire appel aux résultats de la partie I.

I

On pose $H_0(x) = 1$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2}) .$$

1) Calculer $H_1(x)$, $H_2(x)$, $H_3(x)$, $H_4(x)$ et $H_5(x)$.

2) a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, H_n est une fonction polynôme de degré n et que la suite (H_n) vérifie la relation

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - H_n'(x) .$$

2) b) Quel est le coefficient du monôme de plus haut degré dans H_n?

2) c) Exprimer $H_n(-x)$ en fonction de $H_n(x)$. En déduire la valeur de $H_{2n+1}(0)$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

3) a) Pour tout $n \geq 1$, calculer

$$\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})\Big|_{x=0} .$$

(On pourra exprimer e^{-x^2} comme somme d'une série entière).

3) b) En déduire la valeur de $H_{2n}(0)$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

4) a) Quels sont les zéros des fonctions H_1, H_2, H_3, H_4 et H_5?

4) b) Soient $a \in \mathbf{R}$ et $f : [a, +\infty[\to \mathbf{R}$ continue et dérivable sur $]a, +\infty[$. On suppose que

$$f(a) = 0 \text{ et que } \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0 .$$

Montrer qu'il existe $\alpha \in]a, +\infty[$ tel que $f'(\alpha) = 0$.

4) c) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, la fonction H_n admet n zéros réels distincts.

5) a) Montrer que, pour tout m, $n \in \mathbf{N}$, l'on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_m(x) H_n(x) e^{-x^2} dx = 0 \text{ si } m \neq n .$$

5) b) Etant donnée une fonction polynôme P de degré $< n$, calculer

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P(x) H_n(x) e^{-x^2} dx .$$

5) c) Calculer, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_n(x)^2 e^{-x^2} dx\,.$$

(On rappelle que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$).

6) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$ la famille $\{H_0(x), H_1(x), \ldots, H_n(x), xH_n(x)\}$ est une base de l'espace vectoriel des fonctions polynômes de degré au plus $n+1$ et à coefficients réels.

6) b) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ il existe deux réels a_n et c_n que l'on calculera, tels que

$$H_{n+1}(x) = a_n x H_n(x) + c_n H_{n-1}(x)\,, \qquad \text{pour tout } x \in \mathbf{R}\,.$$

(On pourra décomposer H_{n+1} dans la base du 6) a) et utiliser la question 5)).

7) Pour tout $n \geq 0$, calculer l'expression

$$H_n''(x) - 2xH_n'(x) + 2nH_n(x)\,.$$

(On pourra utiliser les questions 2) a) et 6) b)).

8) Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on considère la fonction $u_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbf{R}\,, \quad u_n(x) = e^{-x^2/2} H_n(x) = (-1)^n e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})$$

Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, u_n est vecteur propre de l'application linéaire T définie sur $C^\infty(\mathbf{R})$ par

$$(Tf)(x) = -\frac{d^2 f}{dx^2}(x) + x^2 f(x)\,, \quad \forall x \in \mathbf{R}\,,$$

c'est à dire qu'il existe un nombre réel λ_n que l'on calculera tel que

$$-\frac{d^2 u_n}{dx^2}(x) + x^2 u_n(x) = \lambda_n u_n(x)\,, \quad \forall x \in \mathbf{R}\,.$$

II

On désigne par $C(\mathbf{R})$ (resp. $C^1(\mathbf{R})$, resp. $C^2(\mathbf{R})$) l'ensemble des applications continues (resp. de classe C^1, resp. de classe C^2) de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$.

9) a) Soit $\phi \in C(\mathbf{R})$ telle que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\phi(x)| dx < +\infty\,.$$

Montrer qu'il existe deux suites $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telles que (a_n) tend vers $+\infty$, (b_n) tend vers $-\infty$ et $(\phi(a_n))_{n\in\mathbf{N}}$ et $(\phi(b_n))_{n\in\mathbf{N}}$ convergent vers 0.

b) A-t-on $\phi(x) \to 0$ lorsque $|x| \to +\infty$?

10) a) Soit $u \in C^2(\mathbf{R})$ telle que

$$(*) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \left[(1+x^2)u(x)^2 + u'(x)^2\right] dx < +\infty\,.$$

Calculer, pour tout a et $b \in \mathbf{R}$,

$$\int_a^b \left[u'(x)^2 + x^2u(x)^2 - u(x)^2\right] dx - \int_a^b [u'(x) + xu(x)]^2 dx\,.$$

10) b) Montrer qu'il existe un réel positif α (que l'on calculera) tel que, pour tout $u \in C^2(\mathbf{R})$ vérifiant $(*)$, l'on ait

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left[u'(x)^2 + x^2u(x)^2\right] dx \geq \alpha \int_{-\infty}^{+\infty} u(x)^2 dx$$

11) Justifier l'existence de

$$\inf \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \left[u'(x)^2 + x^2u(x)^2\right] dx \,\middle|\, u \in C^2(\mathbf{R}) \text{ vérifie } (*) \text{ et } \int_{-\infty}^{+\infty} u(x)^2 dx = 1 \right\}$$

et la calculer. Cette borne inférieure est-elle atteinte?

12) Montrer que pour toute fonction $u \in C^2(\mathbf{R})$ vérifiant (*) et $\int_{-\infty}^{+\infty} u(x)^2 dx = 1$, l'on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u'(x)^2 dx \int_{-\infty}^{+\infty} x^2u(x)^2 dx \geq 1/4\,,$$

et donner un exemple de telle fonction u pour laquelle l'inégalité ci-dessus devient une égalité.

FIN